정리류

```
\usepackage{amsmath,amsthm}
...
\newtheorem{thm}{정리}[chapter]
\newtheorem{cor}[thm]{따름정리}
\renewcommand{\proofname}{증명}
```

- 위 명령에 의해 `\begin{thm} ... \end{thm}`, `\begin{cor} ... \end{cor}` 환경 사용 가능
  - '정리 X.X'라는 자동번호 매기기
- `amsmath` 패키지를 불러오면 `\begin{proof} ... \end{proof}`
  - '증명'이라고 쓰고 증명 마지막 줄 끝에 □ 삽입

작거나 같다. 끝으로 4절에서는 극소곡면(minimal surfaces)에 대하여 알아보기로 한다. 극소곡면은 국소적으로 경계를 고정했을 때 넓이가 최소가 되는 곡면이라고 말할 수 있다.

2.1 대역적 곡면이론

이 절에서는 대역적(global) 곡면이론에 관한 몇 가지 정리를 소개하고자 한다. 여기서는 주로 가우스곡률이 곡면의 위상구조에 어떤 영향을 미치는지에 대하여 알아보기로 한다. 지금까지 그래 왔듯이 앞으로도 정칙곡면 M은 항상 연결집합이라는 것을 가정한다.

정리 2.1 (배꼽점). $M \subset \mathbf{R}^3$을 가향 정칙곡면이라 할 때, 가우스함수 Z의 미분이 0이면, 즉 $\mathrm{d}Z = 0$이면 M은 평면 또는 평면의 일부분이다.

증명. 한 점 $\mathbf{p} \in M$을 고정하자. $\mathrm{d}Z = 0$이라는 것은 가우스함수 Z가 상수함수임을 나타낸다. 따라서 M이 $\mathbf{p}$를 지나고 Z에 수직인 평면에 포함되는 것을 보이면 된다. $\mathbf{q} \in M$를 임의의 점이라 하면, M은 연결집합이므로 곡선 $\alpha : [0,1] \to M$이 존재하여 $\alpha(0) = \mathbf{p}, \alpha(1) = \mathbf{q}$이다. 이제 함수 h를

$$h(t) = \langle \alpha(t) - \mathbf{p}, Z \rangle$$

라 정의하면, $h(0) = 0$이고 함수 h를 $t \in (0,1)$에 대하여 미분하면

$$h'(t) = \langle \alpha'(t), Z \rangle = 0.$$

따라서 h는 열린구간 $(0,1)$에서 상수함수이고 $[0,1]$에서 연속함수이므로 닫힌구간 $[0,1]$에서 상수함수이다. $h(0) = 0$이므로 $h(t) = 0$. 특히 $h(1) = \langle \mathbf{q} - \mathbf{p}, Z \rangle = 0$이다. 그러므로 임의의 점 $\mathbf{q} \in M$는 우리가 원하는 평면에 놓인다. □

정의에 의해 점 $\mathbf{p} \in M$가 평면점이면 $\kappa_1(\mathbf{p}) = \kappa_2(\mathbf{p}) = 0$이다. 그리고 이것은 $\mathrm{d}Z_{\mathbf{p}} = 0$인 것과 동치이다. 정리 2.1은

점 $\mathbf{c}$를

$$\mathbf{c} = \mathbf{p} + \frac{1}{k(\mathbf{p})} Z(\mathbf{p})$$

라 놓자. 곡면 위의 임의의 점 $\mathbf{q} \in M$에 대하여 M이 연결집합이므로 $\alpha(0) = \mathbf{p}, \alpha(1) = \mathbf{q}$인 곡선 $\alpha : [0,1] \to M$이 존재한다. 이제 곡선 γ를

$$\gamma(t) = \alpha(t) + \frac{1}{k(\alpha(t))} Z(\alpha(t)) = \alpha(t) + \frac{1}{k} Z(t)$$

라 정의하자. 그러면 도움정리 2.3에 의해 $K = k^2$이 상수이므로,

$$\gamma'(t) = \alpha'(t) + \frac{1}{k} Z'(t)$$

이다. 한편, M의 모든 점이 배꼽점이므로 모든 방향이 주곡률 방향이 된다. 따라서

$$Z'(t) = dZ(\alpha'(t)) = -k\alpha'(t).$$

그러므로 $\gamma'(t) = \alpha'(t) + \frac{1}{k}(-k\alpha'(t)) = 0$. 결과적으로 γ는 상수곡선이 되고, 따라서

$$\mathbf{c} = \gamma(0) = \gamma(1) = \mathbf{q} + \frac{1}{k} Z(\mathbf{q}).$$

다시 말해서, $\|\mathbf{q} - \mathbf{c}\| = \frac{1}{k} = \frac{1}{\sqrt{K}}$이다. □

증명. 이 정리는 따름정리 2.5에 의하여 성립한다. 한편, M의 모든 점이 배꼽점이므로 모든 방향이 주곡률 방향이 된다. 따라서

$$Z'(t) = dZ(\alpha'(t)) = -k\alpha'(t).$$

그러므로 $\gamma'(t) = \alpha'(t) + \frac{1}{k}(-k\alpha'(t)) = 0$. 결과적으로 γ는 상수곡선이 되고, 따라서

$$\mathbf{c} = \gamma(0) = \gamma(1) = \mathbf{q} + \frac{1}{k} Z(\mathbf{q}).$$

□

정리류 바꿔보기

4-1-theoremlikestyle_test1.tex

- 정리류에 간단하게 테두리 둘러보자.
- 증명 끝 (QED) 표시는 ★

```
\renewenvironment{thm}{%
\refstepcounter{thm}
\begin{framed}
\noindent\textbf{\sffamily 정리 \thethm}\quad}
{\end{framed}}

\renewenvironment{cor}{%
\begin{leftbar}
\noindent\textbf{\sffamily 보조정리 \thethm}\quad}
{\end{leftbar}}

\renewcommand\qedsymbol{\color{MainColorOne}★}
```

그러므로 $\gamma'(t) = \alpha'(t) + \dfrac{1}{k}(-k\alpha'(t)) = 0$. 결과적으로 γ는 상수곡선이 되고, 따라서

$$\mathbf{c} = \gamma(0) = \gamma(1) = \mathbf{q} + \frac{1}{k}Z(\mathbf{q}).$$

다시 말해서, $\|\mathbf{q} - \mathbf{c}\| = \dfrac{1}{k} = \dfrac{1}{\sqrt{K}}$ 이다. ★

증명. 이 정리는 따름정리 1.1에 의하여 성립한다. 한편, M의 모든 점이 배꼽점이므로 모든 방향이 주곡률 방향이 된다. 따라서

$$Z'(t) = dZ(\alpha'(t)) = -k\alpha'(t).$$

그러므로 $\gamma'(t) = \alpha'(t) + \dfrac{1}{k}(-k\alpha'(t)) = 0$. 결과적으로 γ는 상수곡선이 되고, 따라서

$$\mathbf{c} = \gamma(0) = \gamma(1) = \mathbf{q} + \frac{1}{k}Z(\mathbf{q}).$$

★

증명. M의 모든 점이 배꼽점이므로 모든 방향이 주곡률 방향이 된다. 따라서

$$Z'(t) = dZ(\alpha'(t)) = -k\alpha'(t).$$

그러므로 $\gamma'(t) = \alpha'(t) + \dfrac{1}{k}(-k\alpha'(t)) = 0$. 결과적으로 γ는 상수곡선이 되고, 따라서

$$\mathbf{c} = \gamma(0) = \gamma(1) = \mathbf{q} + \frac{1}{k}Z(\mathbf{q}).$$ ★

보조정리 1.2 정칙곡면 M의 모든 점이 배꼽점이면 M은 상수인 가우스곡률 $K \geq 0$을 갖는다.

정리 1.3 [정칙곡면과 구의 관계] 정칙곡면 $M \subset \mathbf{R}^3$의 모든 점이 배꼽점이고 $K > 0$이면 M은 반지름이 $\dfrac{1}{\sqrt{K}}$ 인 구면 또는 구면의 일부분이다.

보조정리 1.3 [당연한 따름정리] 정칙곡면 $M \subset \mathbf{R}^3$의 모든 점이 배꼽점이고 $K > 0$이면 M은 반지름이 $\dfrac{1}{\sqrt{K}}$ 인 구면 또는 구면의 일부분이다.

날쌘 정리의 증명. 이 정리는 정리 1.2와 따름정리 1.1에 의하여 성립한다. 또한 다음과 같은 방법으로 직접 보일 수도 있다.

가정에 의해 각 점 $\mathbf{p} \in M$에서 $\kappa_1(\mathbf{p}) = \kappa_2(\mathbf{p}) = k(\mathbf{p}) \neq 0$이므로 $\kappa(\mathbf{p}) > 0$을 가정해도 된다. 한 점 $\mathbf{p} \in M$을 고정하고 점 $\mathbf{c}$를

$$\mathbf{c} = \mathbf{p} + \frac{1}{k(\mathbf{p})}Z(\mathbf{p})$$

라 놓자. 곡면 위의 임의의 점 $\mathbf{q} \in M$에 대하여 M이 연결집합이므로 $\alpha(0) = \mathbf{p}$, $\alpha(1) = \mathbf{q}$인 곡선 $\alpha : [0,1] \to M$이 존재한다. 이제 곡선 γ를

$$\gamma(t) = \alpha(t) + \frac{1}{k(\alpha(t))}Z(\alpha(t)) = \alpha(t) + \frac{1}{k}Z(t)$$

라 정의하자. 그러면 도움정리 1.1에 의해 $K = k^2$이 상수이므로,

$$\gamma'(t) = \alpha'(t) + \frac{1}{k}Z'(t)$$

이다. 한편, M의 모든 점이 배꼽점이므로 모든 방향이 주곡률방향이 된다. 따라서

$$Z'(t) = dZ(\alpha'(t)) = -k\alpha'(t).$$

뭔가 부족해

정리류 미세 조정

4-2-theoremlikestyle_test2.tex

- 아예 환경을 새로 만들어보자.

```
\usepackage{amsmath,amsthm}

% 앞에 정의했던 것 다 주석처리하고
% \newtheorem{thm}{정리}[chapter]
% \newtheorem{cor}[thm]{보조정리}
% \renewcommand{\proofname}{증명}

\makeatletter

\newcounter{thm}  % 새 카운터를 만들고
\setcounter{thm}{0}  % 0으로 초기화

\newenvironment{thm}[1][\empty]{% 옵션 변수 하나를 받을 예정
\refstepcounter{thm}  % 이게 있어야 번호가 순차적으로 늘어나며 \label과 \ref 가능
```

정리류 미세 조정 (계속)

4-2-theoremlikestyle_test2.tex

```
\begin{framed}
\ifx#1\empty
\noindent{\bfseries\sffamily 정리 \thechapter.\thethm}\quad
\else
\noindent{\bfseries\sffamily 정리 \thechapter.\thethm\enskip
  ({\small#1})}\quad
  % 정리 [ ] 안에 있는 부가 설명을 괄호 ( ) 안에 표시
\fi
}{\end{framed}}


\colorlet{shadecolor}{MainColorOne!20}


\newenvironment{cor}[1][\empty]{
% \refstepcounter{thm} 앞에서 선언했으니깐 이것 필요 없어
\begin{shaded}
```

정리류 미세 조정 (계속)

4-2-theoremlikestyle_test2.tex

```
\ifx#1\empty
\noindent{\bfseries\sffamily 보조정리 \thechapter.\thethm}\quad % 정리의 카
    운터를 이어서 사용
\else
\noindent{\bfseries\sffamily 보조정리 \thechapter.\thethm\enskip
  ({\small#1})} \quad
\fi
}{\end{shaded}}


\renewcommand{\proofname}{\color{MainColorOne}{\bfseries\sffamily 증명}}
\renewcommand\qedsymbol{\color{MainColorOne!50}■} % QED 마크 변경


\renewenvironment{proof}[1][\empty]{%
\par%
  \pushQED{\qed} % \qedhere 쓰기 위한 장치 첫 번째 (from amsthm.sty)
```

정리류 미세 조정 (계속)

4-2-theoremlikestyle_test2.tex

```
\begin{description}
\ifx#1\empty
\item[\bfseries\sffamily\color{MainColorOne} 증명]
\else
\item[\bfseries\sffamily\color{MainColorOne} 증명 ({\small#1})] \quad
\fi
}{\popQED % \qedhere 쓰기 위한 장치 두 번째
\end{description}%
\@endpefalse %
\par}
\makeatother
```

해결해 줄 수 있는 곡면이기도 하다. 3절에서는 곡면의 또다른 예인 선직면(ruled surface)에 대하여 알아본다. 선직면은 한 곡선과 그 곡선 위에 정의된 벡터장에 의해 만들어지는 곡면으로 가우스곡률이 항상 0보다 작거나 같다. 끝으로 4절에서는 극소곡면(minimal surfaces)에 대하여 알아보기로 한다. 극소곡면은 국소적으로 경계를 고정했을 때 넓이가 최소가 되는 곡면이라고 말할 수 있다.

1.1 대역적 곡면이론

이 절에서는 대역적(global) 곡면이론에 관한 몇 가지 정리를 소개하고자 한다. 여기서는 주로 가우스곡률이 곡면의 위상구조에 어떤 영향을 미치는지에 대하여 알아보기로 한다. 지금까지 그래 왔듯이 앞으로도 정칙곡면 M은 항상 연결집합이라는 것을 가정한다.

정리 1.1 **(배꼽점)** $M \subset \mathbf{R}^3$을 가향 정칙곡면이라 할 때, 가우스함수 Z의 미분이 0이면, 즉 $\mathrm{d}Z = 0$이면 M은 평면 또는 평면의 일부분이다.

증명 한 점 $\mathbf{p} \in M$을 고정하자. $\mathrm{d}Z = 0$이라는 것은 가우스함수 Z가 상수함수임을 나타낸다. 따라서 M이 $\mathbf{p}$를 지나고 Z에 수직인 평면에 포함되는 것을 보이면 된다. $\mathbf{q} \in M$를 임의의 점이라 하면, M은 연결집합이므로 곡선 $\alpha : [0,1] \to M$이 존재하여 $\alpha(0) = \mathbf{p}, \alpha(1) = \mathbf{q}$이다. 이제 함수 h를

$$h(t) = \langle \alpha(t) - \mathbf{p}, Z \rangle$$

라 정의하면, $h(0) = 0$이고 함수 h를 $t \in (0,1)$에 대하여 미분하면

$$h'(t) = \langle \alpha'(t), Z \rangle = 0.$$

따라서 h는 열린구간 $(0,1)$에서 상수함수이고 $[0,1]$에서 연속함수이므로 닫힌구간 $[0,1]$에서 상수함수이다. $h(0) = 0$이므로 $h(t) = 0$. 특히 $h(1) = \langle \mathbf{q} - \mathbf{p}, Z \rangle = 0$이다. 그러므로 임의의 점 $\mathbf{q} \in M$는 우리가 원하는 평면에 놓인다. ■

정의에 의해 점 $\mathbf{p} \in M$가 평면점이면 $\kappa_1(\mathbf{p}) = \kappa_2(\mathbf{p}) = 0$이다. 그리고 이것은 $\mathrm{d}Z_{\mathbf{p}} = 0$인 것과 동치이다. 정리 1은 정칙곡면 M의 모든 점이 평면점이면 M은 평면이라는 것을 보여준다.

법곡률의 최대값과 최소값이 일치하는 점을 배꼽점이라 말한다. 예를 들어 평면이나 구면의 모든 점은 배꼽점이다 (4장1절 참고). 중요한 것은 그것의 역 또한 성립한다는 사실이다.

정리 1.2 $M \subset \mathbf{R}^3$을 연결 정칙곡면이라 하자. 만일 M의 모든 점이 배꼽점이면 M은 구면이나 평면, 또는 그것의 일부분이다.

증명 **첫째단계**: 점 $\mathbf{p} \in M$가 배꼽점이면 모든 접벡터 $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}$는 주곡률 방향임을 보이자.

$\mathbf{p} \in M$에서 $\kappa_1(\mathbf{p}) = \kappa_2(\mathbf{p}) = k$이고 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$를 주곡률 방향이라고 하자. 그러면 임의의 접벡터 $\mathbf{v} = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2 \in T_{\mathbf{p}}M$에 대하여

$$\begin{aligned} \mathrm{d}Z_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) &= a\, \mathrm{d}Z_{\mathbf{p}}(\mathbf{e}_1) + b\, \mathrm{d}Z_{\mathbf{p}}(\mathbf{e}_2) && (1.1)\\ &= -a\, k\, \mathbf{e}_1 - b\, k\, \mathbf{e}_2 && (1.2)\\ &= -k\, \mathbf{v}. && (1.3) \end{aligned}$$

둘째단계: $\mathbf{x} : D \subset \mathbf{R}^2 \to M$을 좌표함수라 하고 $V = \mathbf{x}(D)$라 놓자. 그러면 V는 평면 또는 구면의 일부분임을 증명하자.

라 정의하자. 그러면 도움정리 1.1에 의해 $K = k^2$ 이 상수이므로,

$$\gamma'(t) = \alpha'(t) + \frac{1}{k}Z'(t)$$

이다. 한편, M 의 모든 점이 배꼽점이므로 모든 방향이 주곡률방향이 된다. 따라서

$$Z'(t) = dZ(\alpha'(t)) = -k\alpha'(t).$$

그러므로 $\gamma'(t) = \alpha'(t) + \frac{1}{k}(-k\alpha'(t)) = 0$. 결과적으로 γ는 상수곡선이 되고, 따라서

$$\mathbf{c} = \gamma(0) = \gamma(1) = \mathbf{q} + \frac{1}{k}Z(\mathbf{q}).$$

다시 말해서, $\|\mathbf{q} - \mathbf{c}\| = \frac{1}{k} = \frac{1}{\sqrt{K}}$ 이다. ■

증명 이 정리는 따름정리 1.1에 의하여 성립한다. 한편, M 의 모든 점이 배꼽점이므로 모든 방향이 주곡률 방향이 된다. 따라서

$$Z'(t) = dZ(\alpha'(t)) = -k\alpha'(t).$$

그러므로 $\gamma'(t) = \alpha'(t) + \frac{1}{k}(-k\alpha'(t)) = 0$. 결과적으로 γ는 상수곡선이 되고, 따라서

$$\mathbf{c} = \gamma(0) = \gamma(1) = \mathbf{q} + \frac{1}{k}Z(\mathbf{q}).$$

■

증명 M 의 모든 점이 배꼽점이므로 모든 방향이 주곡률 방향이 된다. 따라서

$$Z'(t) = dZ(\alpha'(t)) = -k\alpha'(t).$$

그러므로 $\gamma'(t) = \alpha'(t) + \frac{1}{k}(-k\alpha'(t)) = 0$. 결과적으로 γ는 상수곡선이 되고, 따라서

$$\mathbf{c} = \gamma(0) = \gamma(1) = \mathbf{q} + \frac{1}{k}Z(\mathbf{q}).$$ ■

정리 2에 의하면 연결집합인 정칙곡면 M 의 모든 점이 배꼽점이면 M 은 구면 또는 평면이 된다. 따라서 다음 정리가 성립한다.

보조정리 1.2 정칙곡면 M 의 모든 점이 배꼽점이면 M 은 상수인 가우스곡률 $K \geq 0$ 을 갖는다.

정리 1.3 (정칙곡면과 구의 관계) 정칙곡면 $M \subset \mathbf{R}^3$ 의 모든 점이 배꼽점이고 $K > 0$ 이면 M 은 반지름이 $\frac{1}{\sqrt{K}}$ 인 구면 또는 구면의 일부분이다.

보조정리 1.3 (당연한 따름정리) 정칙곡면 $M \subset \mathbf{R}^3$ 의 모든 점이 배꼽점이고 $K > 0$ 이면 M 은 반지름이 $\frac{1}{\sqrt{K}}$ 인 구면 또는 구면의 일부분이다.

증명 (날쌘 정리의 증명) 이 정리는 정리 2와 따름정리 1.1에 의하여 성립한다. 또한 다음과 같은 방법으로 직접 보일 수도 있다.

가정에 의해 각 점 $\mathbf{p} \in M$ 에서 $\kappa_1(\mathbf{p}) = \kappa_2(\mathbf{p}) = k(\mathbf{p}) \neq 0$ 이므로 $\kappa(\mathbf{p}) > 0$ 을 가정해도 된다. 한 점 $\mathbf{p} \in M$ 을 고정하고 점 $\mathbf{c}$를

$$\mathbf{c} = \mathbf{p} + \frac{1}{k(\mathbf{p})}Z(\mathbf{p})$$

라 놓자. 곡면 위의 임의의 점 $\mathbf{q} \in M$ 에 대하여 M 이 연결집합이므로 $\alpha(0) = \mathbf{p}$, $\alpha(1) = \mathbf{q}$ 인 곡선 $\alpha : [0, 1] \to M$ 이 존재한다. 이제 곡선 γ를

$$\gamma(t) = \alpha(t) + \frac{1}{k(\alpha(t))}Z(\alpha(t)) = \alpha(t) + \frac{1}{k}Z(t)$$

정리류 더욱 미세 조정

- mdframed 패키지 이용

숙제 직접 해보라!

`http://prezi.com/zc355i9tcsgz/talk-kts-2012-mdframed/`

⇒ 11월 16일까지 KTUG 게시판에 제출!