3 월리스의 곱

우리의 처음 목표는 월리스의 곱으로 알려진 다음 극한을 구하는 것이다.

정리 1

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{4}{3}\frac{4}{5}\frac{6}{5}\frac{6}{7}\cdots\frac{2n}{2n-1}\frac{2n}{2n+1}$$

증명. 이 증명은 다음과 같이 연습문제로 남겨둔다.

1. **sine 함수의 거듭제곱의 적분에 관한 점화식을 사용하여 다음을 증명하라.**

$$\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}x\,dx=\frac{2n-1}{2n}\frac{2n-3}{2n-1}\cdots\frac{1}{2}\frac{\pi}{2},\qquad \int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}x\,dx=\frac{2n}{2n+1}\frac{2n-2}{2n-1}\cdots\frac{1}{2}\frac{3}{2}.$$

2. $a=1,2,3,\ldots$ **에 대하여** $\sin^n x$ **가 감소한다는 사실과 정의 정적분들을 이용하여 다음 부등식이 성립함을 보여라.**

$$1\le\frac{\int_0^{\pi/2}\sin^{2n-1}x\,dx}{\int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}x\,dx}\le 1+\frac{1}{2n}$$

3. **구간** $[0,\pi/2]$**에서의** $\sin^{2n}x$**와** $\sin^{2n+1}x$**의 정적분의 비를 취하여 월리스의 곱을 유도하라.**

따름정리 2

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!n^{1/2}}=\pi^{1/2}$$

증명. 월리스의 곱은 $\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^2 4^2\cdots(2n-2)^2}{3^2 5^2\cdots(2n-1)^2}2n$와 같이 바꾸어 쓸 수 있다. 이 식의 양변의 제곱근을 취하면 원하는 식이 얻어진다.

마지막으로 다음 식이 성립함을 보이고 스털링의 식에 들어있는 상수 c의 값이 $1/\sqrt{2\pi}$임을 보여라.

$$\begin{aligned} c &= \lim_{n\to\infty}\frac{(2n)^{2n+\frac{1}{2}}e^{-2n}}{(2n)!} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2 2^{2n}\sqrt{2}}{(2n)!n^{1/2}}\left[\frac{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}}{n!}\right]^2=\sqrt{2\pi}c^2 \end{aligned}$$